Československá akadémia vied
Kabinet matematiky Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

Alexander Rosa

O CYKLICKÝCH ROZKLADOCH KOMPLETNÉHO GRAFU

Kandidátska dizertačná práca

Školiteľ: Prof.Dr.Anton Kotzig DrSc

Bratislava, november 1965

O B S A H

Úvod 1

Kapitola I. Očíslovania grafov 3

§1. 3

§2. 8

Kapitola II. Rozklady kompletného grafu na mnohouholníky 17

§1. 17

§2. Rozklady kompletného grafu na trojuholníky . . . 19

§3. Rozklady kompletného grafu na mnohouholníky . . . 30

Kapitola III. Rozklady kompletného grafu na stromy . . . 45

Kapitola IV. Rozklady kompletného grafu na špeciálne druhy grafov 74

§1. Rozklady kompletného grafu na párne grafy 74

§2. Rozklady kompletného grafu na kompletné grafy . . 80

Záverečné poznámky 83

Literatúra 85

ÚVOD

Prvým podnetom k štúdiu otázok, ktorými sa zaoberá táto práca, bol problém, ktorý formuloval na Sympóziu z teórie grafov v Smolenicíach roku 1963 G.Ringel [9]. Pokusy o dôkaz jeho hypotézy o tom, že kompletný graf s 2n+1 vrcholmi možno rozložiť na stromy izomorfné danému stromu s n hranami, viedli k rozšírenej formulácii problému - začali sa skúmať špeciálne, takzvané cyklické rozklady kompletných grafov na izomorfné podgrafy.

V literatúre existuje len niekoľko málo prác, ktoré si všímajú problém cyklického rozkladu kompletného grafu na izomorfné podgrafy, pričom sa tieto problémy riešia zväčša v ekvivalentnej kombinatorickej formulácii len pre niektoré špeciálne prípady (Steinerove systémy trojíc, cyklické projektívne roviny, resp. planárne úplné diferenčné množiny [8], [16], [17], [19]).

Zavedenie istých prípustných očíslovaní grafu (kapitola I.) umožnilo pristúpiť k problému cyklických rozkladov kompletného grafu viacmenej jednotným spôsobom. V jednotlivých kapitolách práce sa potom vyšetrujú cyklické rozklady kompletných grafov na izomorfné podgrafy patriace do niektorej špeciálnej triedy grafov (mnohouholníky - kapitola II., stromy - kapitola III., párne grafy, párno-kompletné grafy, kompletné grafy - kapitola IV.) Otvorené problémy, ako aj problémy, súvisiace s uvedenou problematikou v menšej miere, sa naznačujú v záverečných poznámkach.

Chcel by som na tomto mieste poďakovať môjmu Školiteľovi prof.Dr.Antonovi Kotzigovi DrSc za vedenie a usmerňovanie počas celého trvania mojej vedeckej prípravy, ako aj za cenné rady a pripomienky k predkladanej práci. Za cenné rady a pripomienky k tejto práci ďakujem týmto tiež pracovníkovi Kabinetu matematiky SAV Jurajovi Bosákovi CSc.

Kapitola I

OČÍSLOVANIA GRAFOV

§1. Pod grafom budeme v celej práci rozumieť obyčajný graf, t.j. konečný neorientovaný graf bez slučiek a násobných hrán.[1] Vrcholy grafu budeme označovať malými písmenami u, v a pod.(prípadne s indexami), hrany grafu budeme označovať malými písmenami h, g a pod. (prípadne s indexami) alebo ako dvojice vrcholov: (u,v). Znakom $G(m;n)$ budeme označovať graf s m vrcholmi a n hranami.

Pod očíslovaním O_G grafu $G(m;n)$ budeme rozumieť očíslovanie jeho vrcholov v_i číslami a_i, $i=1,\dots,m$, kde a_i je prirodzené číslo alebo nula, pričom sa ľubovoľným dvom rôznym vrcholom v_j, v_k grafu G priradia rôzne čísla: $a_j \neq a_k$. Budeme tiež hovoriť, že vrchol v_i má hodnotu a_i v očíslovaní O_G. Znakom V_{O_G} budeme označovať množinu čísel a_i $(i=1,\dots,m)$ pri očíslovaní O_G grafu $G(m;n)$.

Pod hodnotou hrany $h_k=(v_i,v_j)$ v očíslovaní O_G grafu $G(m;n)$ budeme rozumieť číslo $b_k=|a_i-a_j|$, $k=1,\dots,n$, kde a_i, a_j sú čísla, priradené vrcholu v_i, resp. v_j grafu G v očíslovaní O_G. Znakom H_{O_G} budeme označovať množinu čísel b_k $(k=1,\dots,n)$ pri očíslovaní O_G grafu $G(m;n)$.

Očíslovanie $\bar{O}_G$ grafu $G(m;n)$ budeme nazývať komplementárnym očíslovaním k očíslovaniu O_G, ak platí: Ak má vrchol v_i v očíslovaní O_G priradené číslo a_i, má v_i v očíslovaní $\bar{O}_G$ priradené číslo $n-a_i$.

Def.1.1. Očíslovanie O_G grafu $G(m;n)$ sa nazýva α-očíslovaním, ak platí: (a) $V_{O_G} \subset \{0,1,\dots,n\}$; (b) $H_{O_G} = \{1,2,\dots,n\}$.

---

1) Terminológiu budeme používať podľa [2].

Def.1.2. Očíslovanie O_G grafu $G(m;n)$ sa nazýva β-očíslovaním, ak platí: (a) $V_{O_G} \subset \{0,1,\dots,n\}$; (b) $H_{O_G} = \{1,2,\dots,n\}$; (c) existuje $x \in \{0,1,\dots,n\}$ také, že o ľubovoľnej hrane (v_i,v_j) grafu G platí alebo $a_i \leqq x$, $a_j > x$ alebo $a_i > x$, $a_j \leqq x$.

Bezprostredne z definícií 1.1 a 1.2 vyplýva:

Dôsledok 1. Každé β-očíslovanie grafu G je aj α-očíslovaním grafu G.

Dôsledok 2. Ak existuje α-očíslovanie grafu $G(m;n)$, potom je $m - n \leqq 1$.

Dôsledok 3. Ak existuje β-očíslovanie grafu G, potom je G párny graf.

Dôsledok 4. Počet rôznych α-očíslovaní (resp. počet rôznych β-očíslovaní) grafu je párny.

Posledný dôsledok vyplýva z toho, že komplementárne očíslovanie k α-očíslovaniu (resp. k β-očíslovaniu) grafu bude tiež α-očíslovaním (resp. β-očíslovaním) grafu, pričom sú tieto dve očíslovania rôzne.

Nech je $N \geqq n$. Označme $R_0 = \{0,1,\dots,n-1\}$,
$R_n = \{N-n+1, N-n+2, \dots, N-1, N\}$.

Def.1.3. Očíslovanie O_G grafu $G(m;n)$ sa nazýva γ-očíslovaním, ak platí: (a) $V_{O_G} \subset R_0 + R_n$; (b) $H_{O_G} = R_n$.

Množinu V_{O_G} možno zrejme písať v tvare $V_{O_G} = V^1_{O_G} + V^2_{O_G}$, kde $V^1_{O_G} \subset R_0$, $V^2_{O_G} \subset R_n$.

Def.1.4. Očíslovanie O_G grafu $G(m;n)$ sa nazýva δ-očíslovaním, ak platí: (a) $V_{O_G} \subset R_0 + R_n$; (b) $H_{O_G} = R_n$; (c) neexistuje prirodzené $x \notin V^1_{O_G}$ také, že $0 < x < b_1$ a neexistuje prirodze-

né $y \notin V^2_{O_G}$ také, že $b_2 < y < N$, kde $b_1 = \sup V^1_{O_G}$, $b_2 = \inf V^2_{O_G}$.

Bezprostredne z definícií 1.3 a 1.4 vyplýva:

Dôsledok 1. Každé δ-očíslovanie grafu G je aj γ-očíslovaním grafu G.

Dôsledok 2. Ak existuje γ-očíslovanie grafu G, potom je G párny graf.

Dôsledok 3. Ak existuje δ-očíslovanie grafu G, potom je G párny graf.

Def.1.5. Očíslovanie O_G grafu G(m;n) sa nazýva σ-očíslovaním, ak platí: (a) $V_{O_G} \subset \{0,1,\dots,2n\}$; (b) $H_{O_G} \equiv \{1,2,\dots,n\}$.

Def.1.6. Očíslovanie O_G grafu G(m;n) sa nazýva ϱ-očíslovaním, ak platí: (a) $V_{O_G} \subset \{0,1,\dots,2n\}$; (b) $H_{O_G} \equiv \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, kde alebo $x_i=i$ alebo $x_i=2n+1-i$.

Bezprostredne z definícií 1.5 a 1.6 vyplýva:

Dôsledok 1. Každé α-očíslovanie grafu G je aj σ-očíslovaním grafu G.

Dôsledok 2. Každé σ-očíslovanie grafu G je aj ϱ-očíslovaním grafu G.

Pre grafy s nepárnym počtom hrán zavedieme ešte dve definície.

Def.1.7. Očíslovanie O_G grafu G(m;2n-1) sa nazýva p-očíslovaním, ak platí: (a) $V_{O_G} \subset \{0,1,\dots,2n-1\}$; (b) $H_{O_G} \equiv \{1,2,\dots,n\}$; (c) k ľubovoľnej hrane $h_k=(v_i,v_j)$ existuje hrana $h_s=(v_p,v_q)$ grafu G tak, že platí: $a_p \equiv a_i+n \pmod{2n}$, $a_q \equiv a_j+n \pmod{2n}$, $b_s=b_k$.

Def.1.8. Očíslovanie O_G grafu G(m;2n-1) sa nazýva q-očíslovaním, ak platí: (a) $V_{O_G} \subset \{0,1,\dots,2n-1\}$; (b) $H_{O_G} \equiv \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$,

kde alebo $x_i=i$ alebo $x_i=2n-i$; (c) k ľubovoľnej hrane $h_k=(v_i,v_j)$ existuje hrana $h_s=(v_p,v_q)$ grafu G tak, že platí: $a_p \equiv a_i+n \pmod{2n}$, $a_q \equiv a_j+n \pmod{2n}$; alebo $b_s=b_k$ alebo $b_s=2n-b_k$.

Bezprostredne z definícií 1.7 a 1.8 vyplýva:

Dôsledok. Každé p-očíslovanie grafu G je aj q-očíslovaním grafu G.

Skôr než by sme odvodili vzťah medzi α-očíslovaním a p-očíslovaním, zavedieme ešte jednu definíciu.

Def.1.9. Graf G sa nazýva r-rozložiteľný ($r \geq 2$), ak existuje r-1 jeho hrán $h_1,\ldots,h_{r-1}$ takých, že (1) po ich vynechaní sa G rozpadne na r izomorfných disjunktných podgrafov $G_1,\ldots,G_r$, pričom G_i obsahuje aspoň jednu hranu; (2) hrana h_i spojuje v G tie vrcholy grafov G_j, G_k, ktoré si zodpovedajú v nejakom izomorfizme.

Podgrafy G_i z def.1.9 nazvime brehmi grafu G, hrany h_i z def.1.9 nazvime priečkami grafu G.

Veta 1.1. p-očíslovanie grafu G existuje práve vtedy, keď je G 2-rozložiteľný a keď existuje α-očíslovanie brehov grafu G.

Dôkaz. I. Nech je daný graf G, ktorý je 2-rozložiteľný. Graf G má zrejme nepárny počet hrán 2n-1, pričom každý z jeho brehov B_1, B_2 má n-1 hrán. Nech existuje α-očíslovanie O_G^1 brehu B_1 grafu G(m;2n-1). Ak má vrchol v_i^1 grafu B_1 priradené v očíslovaní O_G^1 číslo a_i^1, potom vrcholu v_i^2 grafu B_2, ktorý zodpovedá v nejakom izomorfizme vrcholu v_i^1 grafu B_1, priradíme číslo $a_i^2=a_i^1+n$, čím budú očíslované všetky vrcholy grafu G.

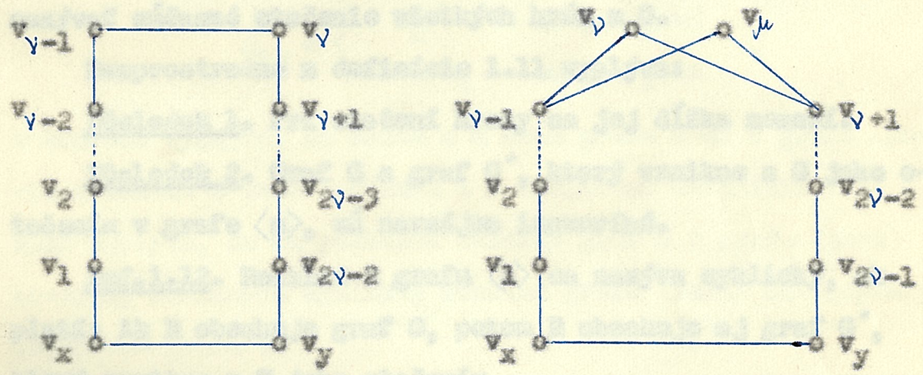
Takéto očíslovanie O_G grafu G(m;2n-1) bude zrejme p-očíslovaním (hodnotu n v tomto očíslovaní bude mať práve priečka grafu G).

II. Nech je daný graf G(m;2n-1) a nech existuje p-očíslovanie O_G grafu G. Nech je $h=(v_x,v_y)$ tá hrana grafu G, ktorá má v očíslovaní O_G hodnotu n (bez obmedzenia všeobecnosti môžeme predpokladať $a_x < n$). Dokážeme, že hrana h je mostom grafu. Predovšetkým nemôže h ležať v nijakej kružnici párnej dĺžky. Predpokladajme totiž, že h leží v kružnici $K = \{v_x,v_1,v_2,\dots,v_{2\nu-2},v_y,v_x\}$ dĺžky 2ν. Podľa bodu (c) def.1.7 bude mať potom hrana $(v_{\nu-1},v_\nu)$ kružnice K hodnotu n v očíslovaní O_G, čo je spor (obr.1.1). Podobne nemôže h ležať v nijakej kružnici nepárnej dĺžky. Predpokladajme totiž, že h leží v kružnici $K_1 = \{v_x,v_1,\dots,v_{\nu-1},v_\nu,v_{\nu+1},\dots,v_{2\nu-1},v_y,v_x\}$ dĺžky $2\nu+1$. Potom by v dôsledku bodu (c) def.1.7 musela hrana h ležať aj v kružnici $K_2 = \{v_x,v_1,\dots,v_{\nu-1},v_\mu,v_{\nu+1},\dots,v_{2\nu-1},v_y,v_x\}$ dĺžky $2\nu+1$, kde $v_\mu \neq v_\nu$, $a_\mu = a_\nu + n$ (obr.1.2), pričom by v dôsledku vzťahov $a_{\nu+1} = a_{\nu-1}+n$, $a_\nu \neq a_{\nu-1}$ muselo platiť $|a_\nu - a_{\nu-1} - n| = |a_\nu - a_{\nu-1}+n|$, čo je možné len pri n=0. Dostali sme opäť spor, teda hrana h je mostom grafu G.

O každej zo zvyšných hrán (v_i,v_j) grafu G platí: alebo je súčasne $a_i < n$, $a_j < n$, alebo je súčasne $a_i \geq n$, $a_j \geq n$. Keby totiž bolo pre nejakú hranu $h_1=(v_{i_1},v_{j_1})$ napríklad $a_{i_1} < n$, $a_{j_1} \geq n$, musela by existovať hrana $h_2=(v_{i_2},v_{j_2})$ taká, že $a_{i_2} = a_{i_1}+n \geq n$, $a_{j_2} = a_{j_1}+n \pmod{2n} < n$, takže o hodnotách hrán by platilo $b_1 \neq b_2$, čo by odporovalo bodu (c) def.1.7.

Ak vynecháme z G hranu h (most), rozpadne sa G na dve komponenty G_1, G_2 také, že pre všetky vrcholy v_i z G_1 platí $a_i < n$ a pre všetky vrcholy v_j z G_2 platí $a_j \geq n$. Je zrejmé, že ak ponecháme vrcholom grafu G_1 priradené tie isté čísla, ako v očíslovaní O_0 grafu G, dostaneme tak α-očíslovanie grafu G_1. Z predchádzajúceho zároveň vyplýva, že graf G je 2-rozložiteľný (izomorfné grafy G_1, G_2 sú jeho brehy, hrana h je jeho priečka).

Veta 1.1 je dokázaná.



Obr.1.1 Obr.1.2

§2. V tomto paragrafe ukážeme, ako možno využiť očíslovania definované v §1 tejto kapitoly na získanie cyklických rozkladov kompletných grafov na podgrafy izomorfné danému grafu.

Pod kompletným grafom s n vrcholmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ - označujeme ho $\langle n \rangle$ - budeme rozumieť graf, v ktorom sú ľubovoľné dva (rôzne) vrcholy spojené (práve jednou) hranou.

Pod rozkladom R kompletného grafu $\langle n \rangle$ budeme rozumieť systém podgrafov $R = \{G_1, \ldots, G_r\}$ grafu $\langle n \rangle$ taký, že každá hrana grafu $\langle n \rangle$ patrí do práve jedného z podgrafov systému R.

Def.1.10. Dĺžkou hrany (v_i, v_j) , $i,j=1,2,\ldots,n$, $i \neq j$, v grafe $\langle n \rangle$ budeme nazývať číslo

$$d_{ij} = \min (|i-j|, n-|i-j|) .$$

Def.1.11. Otočením hrany (v_i, v_j) v grafe $\langle n \rangle$ budeme nazývať súčasné zväčšenie oboch indexov o jednotku, ktorým z hrany (v_i, v_j) dostaneme hranu (v_{i+1}, v_{j+1}) (pričom $v_{i+kn} = v_i$ pre $k=\pm1,\pm2,\ldots$). Otočením podgrafu G v grafe $\langle n \rangle$ budeme nazývať súčasné otočenie všetkých hrán z G.

Bezprostredne z definície 1.11 vyplýva:

Dôsledok 1. Pri otočení hrany sa jej dĺžka nemení.

Dôsledok 2. Graf G a graf G´, ktorý vznikne z G jeho otočením v grafe $\langle n \rangle$, sú navzájom izomorfné.

Def.1.12. Rozklad R grafu $\langle n \rangle$ sa nazýva cyklický, ak platí: Ak R obsahuje graf G, potom R obsahuje aj graf G´, ktorý vznikne z G jeho otočením.

Bezprostredne z definícií 1.11 a 1.12 vyplýva:

Dôsledok 1. Ak je R cyklický rozklad grafu $\langle 2n+1 \rangle$ na grafy, z ktorých každý má n hrán, potom sú všetky grafy z R navzájom izomorfné.

Veta 1.2. Cyklický rozklad kompletného grafu $\langle 2n+1 \rangle$ na podgrafy izomorfné danému grafu G(m;n) existuje práve vtedy, keď existuje ς-očíslovanie grafu G.

Dôkaz. I. Z definície 1.10 vyplýva, že sa v grafe $\langle 2n+1 \rangle$ vyskytujú len hrany dĺžky $1,2,\ldots,n$, pričom sa v tomto grafe vyskytuje práve $2n+1$ hrán dĺžky i $(i=1,2,\ldots,n)$

$$(v_1, v_{i+1}), (v_2, v_{i+2}), \ldots, (v_{2n+1}, v_i) ,$$

ktoré dostaneme napríklad tak, že vezmeme niektorú z hrán dĺžky i a postupne ju otočíme 2n-krát.

II. Nech je daný graf G(m;n), ktorý má ρ-očíslovanie O_G, pričom $V_{O_G} = \{a_1,\dots,a_m\}$. Podľa bodu (b) def.1.6 platí potom: $H_{O_G} = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, kde alebo $x_1=i$ alebo $x_1=2n+1-i$. Ak označíme vrcholy grafu $\langle 2n+1\rangle$ tak, aby platilo $v_i=v_{a_i}$, potom v súlade s def.1.6 a 1.10 platí medzi hodnotou b_k ľubovoľnej hrany $h_k=(v_i,v_j)$ grafu G v očíslovaní O_G a dĺžkou d_{ij} hrany h_k v grafe $\langle 2n+1\rangle$ vzťah:

$$d_{ij} = \begin{cases} b_k & \text{ak je } b_k \leqq n \\ 2n+1-b_k & \text{ak je } b_k > n \end{cases},$$

z ktorého vyplýva, že každá z n hrán grafu G má v grafe $\langle 2n+1\rangle$ rôznu dĺžku. Z bodu I.dôkazu a z dôsledkov definícií 1.11 a 1.12 vyplýva, že ak postupne otočíme graf G v grafe $\langle 2n+1\rangle$ 2n-krát, dostaneme cyklický rozklad grafu $\langle 2n+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

III. Nech je daný cyklický rozklad grafu $\langle 2n+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G(m;n). Vezmime ľubovoľný z 2n+1 podgrafov tohto rozkladu a označme ho G_+ (G_+ je izomorfný s G). Dokážeme, že všetky hrany grafu G_+ majú rôznu dĺžku v grafe $\langle 2n+1\rangle$. Predpokladajme, že v G_+ existujú dve hrany s rovnakou dĺžkou i, $1 \leqq i \leqq n$, napríklad (v_x,v_{x+i}) a (v_y,v_{y+i}), $1 \leqq x \leqq 2n+1$, $1 \leqq y \leqq 2n+1$, $x \neq y$ (bez obmedzenia všeobecnosti možno predpokladať, že $y > x$). Podľa definície cyklického rozkladu musí tento rozklad obsahovať aj graf $G_+^{(y-x)}$, ktorý vznikne z G_+ po y-x otočeniach. Potom graf $G_+^{(y-x)}$ bude obsahovať hranu (v_y,v_{y+i}),

čo odporuje definícii rozkladu grafu $\langle 2n+1\rangle$. Všetky hrany grafu G_+ majú teda rôznu dĺžku v grafe $\langle 2n+1\rangle$. To ale znamená, že existuje ρ-očíslovanie grafu G.

Dôsledok 1. Ak graf G(m;n) má σ-očíslovanie, potom existuje cyklický rozklad grafu $\langle 2n+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

Dôsledok 2. Ak graf G(m;n) má α-očíslovanie, potom existuje cyklický rozklad grafu $\langle 2n+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

Dôsledok 3. Ak graf G(m;n) má β-očíslovanie, potom existuje cyklický rozklad grafu $\langle 2n+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

Veta 1.3. Ak graf G(m;n) má γ-očíslovanie, potom existuje cyklický rozklad grafu $\langle 2n+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

Dôkaz. Nech O_G je γ-očíslovanie grafu G(m;n). Ak položíme N=2n (pozri def.1.3), dostaneme zrejme z γ-očíslovania O_G ρ-očíslovanie O'_G grafu G. Tvrdenie vety potom vyplýva bezprostredne z vety 1.2.

Dôsledok. Ak graf G(m;n) má δ-očíslovanie, potom existuje cyklický rozklad grafu $\langle 2n+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

Veta 1.4. Nech je k ľubovoľné prirodzené číslo. Ak graf G(m;n) má β-očíslovanie, potom existuje cyklický rozklad grafu $\langle 2kn+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

Dôkaz. Nech má vrchol v_i daného grafu G(m;n) v β-očíslovaní O_G hodnotu a_i. Bez obmedzenia všeobecnosti možno predpokladať, že o každej hrane $h_s=(v_i,v_j)$, s=1,...,n, grafu G platí $a_i \leqq x$, $a_j > x$, kde x je prirodzené. Vezmime teraz k exemplárov grafu G - označme ich $G^{(\nu)}$ - a priraďme koncom $v_i^{(\nu)}$, $v_j^{(\nu)}$

hrany $h_s^{(\nu)}=(v_i^{(\nu)},v_j^{(\nu)})$ grafu $G^{(\nu)}$ čísla $a_i^{(\nu)}$, $a_j^{(\nu)}$ takto definované: $a_i^{(\nu)}=a_i$, $a_j^{(\nu)}=a_j+n(\nu-1)$, $\nu=1,\dots,k$. Ak teraz utvoríme graf G' superpozíciou grafov $G^{(\nu)}$ tak, že položíme $v_i^{(\mu)}=v_i^{(\varkappa)}$ pre všetky $\mu,\varkappa=1,\dots,k$ a pre všetky $s=1,\dots,n$, možno zrejme tento graf $G'(m';n')$, kde $n'=kn$, rozložiť spätne na k grafov izomorfných grafu G. Ak ponecháme vrcholom grafu G' priradené tie isté čísla ako v grafoch $G^{(\nu)}$, dostaneme tak zrejme β-očíslovanie grafu G'. Podľa dôsledku 3 vety 1.2 existuje potom cyklický rozklad grafu $\langle 2kn+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu $G'(m';kn)$, a teda aj na podgrafy izomorfné grafu $G(m;n)$ (cyklickosť je totiž zrejmá).

Veta 1.5. Nech je k ľubovoľné prirodzené číslo. Ak graf $G(m;n)$ má γ-očíslovanie, potom existuje cyklický rozklad grafu $\langle 2kn+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

Dôkaz. Dôkaz je analogický dôkazu vety 1.4. Nech má vrchol v_i daného grafu $G(m;n)$ v γ-očíslovaní O_G hodnotu a_i. Bez obmedzenia všeobecnosti možno predpokladať, že o každej hrane $h_s=(v_i,v_j)$, $s=1,\dots,n$, grafu G platí: $a_i\in V^1_{O_G}$, $a_j\in V^2_{O_G}$. Vezmime k exemplárov grafu G - označme ich $G^{(\nu)}$ - a priraďme koncom $v_i^{(\nu)}$, $v_j^{(\nu)}$ hrany $h_s^{(\nu)}=(v_i^{(\nu)},v_j^{(\nu)})$ grafu $G^{(\nu)}$ čísla $a_i^{(\nu)}$, $a_j^{(\nu)}$ takto definované: $a_i^{(\nu)}=a_i$, $a_j^{(\nu)}=a_j-n(\nu-1)$, $\nu=1,\dots,k$. Ak teraz utvoríme graf G' superpozíciou grafov $G^{(\nu)}$ tak, že položíme $v_i^{(\mu)}=v_i^{(\varkappa)}$ pre všetky $\mu,\varkappa=1,\dots,k$ a pre všetky $s=1,\dots,n$, možno zrejme tento graf $G'(m';n')$, kde $n'=kn$, rozložiť spätne na k grafov izomorfných grafu G. Ak ponecháme vrcholom grafu G' priradené tie

isté čísla, ako v grafoch $G^{(v)}$, dostaneme tak zrejme β-očíslovanie grafu G'. Podľa vety 1.3 existuje potom cyklický rozklad grafu $\langle 2kn+1\rangle$ na podgrafy izomorfné grafu $G'(m';kn)$, a teda aj na podgrafy izomorfné grafu $G(m;n)$.

Veta 1.6. Cyklický rozklad kompletného grafu $\langle 2n\rangle$ na podgrafy izomorfné danému grafu $G(m;2n-1)$ existuje práve vtedy, keď existuje q-očíslovanie grafu G.

Dôkaz. I. Z definície 1.10 vyplýva, že sa v grafe $\langle 2n\rangle$ vyskytujú len hrany dĺžky $1,2,\dots,n$, pričom sa v tomto grafe vyskytuje práve $2n$ hrán dĺžky i $(i=1,2,\dots,n-1)$

$$(v_1,v_{i+1}),\ (v_2,v_{i+2}),\dots,\ (v_{2n},v_i)$$

a práve n hrán dĺžky n

$$(v_1,v_{n+1}),\ (v_2,v_{n+2}),\dots,\ (v_n,v_{2n})\ .$$

II. Nech je daný graf $G(m;2n-1)$, ktorý má q-očíslovanie O_G, pričom $V_{O_G}=\{a_1,\dots,a_m\}$. Podľa bodu (b) def.1.8 platí potom $H_{O_G}=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, kde alebo $x_i=i$ alebo $x_i=2n-i$. Ak označíme vrcholy grafu $\langle 2n\rangle$ tak, aby platilo $v_i=v_{a_i}$, potom v súlade s def.1.8 a 1.10 platí medzi hodnotou b_k ľubovoľnej hrany $h_k=(v_i,v_j)$ grafu G v očíslovaní O_G a dĺžkou d_{ij} hrany h_k v grafe $\langle 2n\rangle$ vzťah:

$$d_{ij}=\begin{cases} b_k & \text{ak je } b_k\leq n \\ 2n-b_k & \text{ak je } b_k\geq n \end{cases},$$

z ktorého vyplýva, že z $2n-1$ hrán grafu G má v grafe $\langle 2n\rangle$ práve jedna hrana dĺžku n a zo zvyšných $2n-2$ hrán grafu G majú v grafe $\langle 2n\rangle$ práve dve hrany dĺžku i, $i=1,2,\dots,n-1$, pričom rovnakú dĺžku i majú práve hrany (v_x,v_{x+i}), (v_{x+n},v_{x+n+i}).

Z bodu I.dôkazu a z dôsledkov def.1.11 a 1.12 vyplýva, že ak postupne otočíme graf G v grafe $\langle 2n \rangle$ (n-1)-krát, dostaneme cyklický rozklad grafu $\langle 2n \rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

III. Nech je daný cyklický rozklad grafu $\langle 2n \rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G(m;2n-1). Vezmime ľubovoľný z n podgrafov tohto rozkladu a označme ho G_+ (G_+ je izomorfný s G). Dokážeme, že v grafe G_+ (a) práve jedna hrana má dĺžku n; (b) práve dve hrany majú dĺžku i, i=1,...,n-1, pričom ak sú týmito dvomi hranami (v_p,v_{p+i}) a (v_q,v_{q+i}), potom platí $q=p+n \pmod{2n}$.

(a) Predpokladajme, že v G_+ existujú dve hrany dĺžky n, napríklad (v_x,v_{x+n}) a (v_y,v_{y+n}), $1 \leq x \leq 2n$, $1 \leq y \leq 2n$, $y \neq x \pmod n$ (bez obmedzenia všeobecnosti možno predpokladať, že $y > x$). Podľa definície cyklického rozkladu musí tento rozklad obsahovať aj graf $G_+^{(y-x)}$, ktorý vznikne z G_+ po y-x otočeniach. Graf $G_+^{(y-x)}$ bude potom obsahovať hranu (v_y,v_{y+n}), čo odporuje definícii rozkladu grafu $\langle 2n \rangle$.

(b) Podobne ako v bode (a) možno ukázať, že v grafe G_+ sa nemôžu vyskytovať viac ako dve hrany dĺžky i, i=1,2,...,n-1. Nech teda v G_+ existujú práve dve hrany dĺžky i, napríklad (v_x,v_{x+i}) a (v_y,v_{y+i}), $1 \leq x \leq 2n$, $1 \leq y \leq 2n$ (bez obmedzenia všeobecnosti možno predpokladať, že $y > x$). Predpokladajme, že $y-x \neq n$. Podľa definície cyklického rozkladu musí tento rozklad obsahovať aj graf $G_+^{(y-x)}$, ktorý vznikne z G_+ po y-x otočeniach. Graf $G_+^{(y-x)}$ bude potom obsahovať hranu (v_y,v_{y+i}), čo odporuje definícii rozkladu grafu $\langle 2n \rangle$. Musí byť teda y-x=n. Z dokázaného vyplýva existencia q-očíslovania grafu G.

Dôsledok 1. Ak graf G(m;2n-1) má p-očíslovanie, potom exi-

stuje cyklický rozklad grafu $\langle 2n \rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

Dôsledok 2. Ak graf G(m;2n-1) je 2-rozložiteľný a ak existuje α-očíslovanie jeho hrehov, potom existuje cyklický rozklad grafu $\langle 2n \rangle$ na podgrafy izomorfné grafu G.

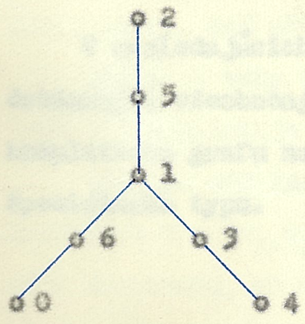
+

Na záver tejto kapitoly uveďme ešte niekoľko príkladov.

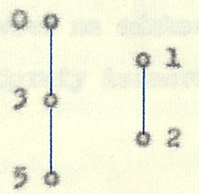
Príklad 1.1. Príkladom grafu, pre ktorý existuje α-očíslovanie, ale neexistuje β-očíslovanie, je graf na obr.1.3. (Takýmto príkladom môže byť aj ľubovoľný graf, ktorý nie je párnym grafom a pre ktorý existuje α-očíslovanie.)

Príklad 1.2. Príkladom grafu, pre ktorý existuje σ-očíslovanie, ale neexistuje α-očíslovanie, je graf na obr.1.4.

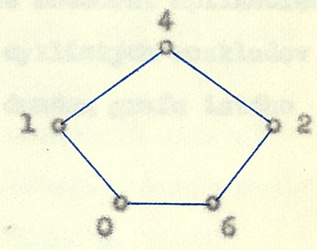
Príklad 1.3. Príkladom grafu, pre ktorý existuje ρ-očíslovanie, ale neexistuje σ-očíslovanie, je graf na obr.1.5.



Obr.1.3



Obr.1.4



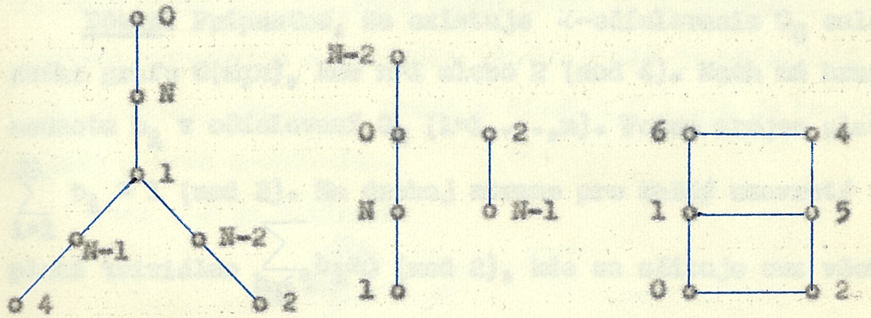
Obr.1.5

Príklad 1.4. Príkladom grafu, pre ktorý existuje γ-očíslovanie, ale neexistuje δ-očíslovanie, je graf na obr.1.6.

Príklad 1.5. Príkladom grafu, pre ktorý existuje δ-očíslovanie, ale neexistuje α-očíslovanie, je graf na obr.1.7.

Príklad 1.6. Príkladom grafu, pre ktorý existuje α-očíslovanie, ale neexistuje γ-očíslovanie (a teda ani δ-očíslovanie), je ľubovoľný graf, ktorý nie je párnym grafom a pre ktorý existuje α-očíslovanie (najmenším takým grafom je trojuholník).

Príklad 1.7. Príkladom grafu, pre ktorý existuje q-očíslovanie, ale neexistuje p-očíslovanie, je graf na obr.1.8.

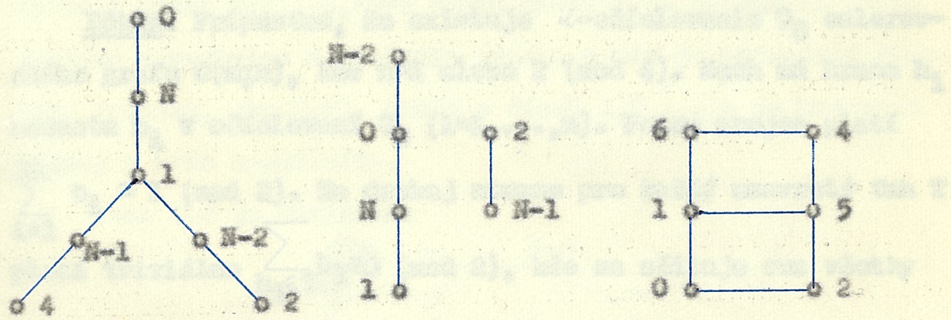


Obr.1.6 Obr.1.7 Obr.1.8

V nasledujúcich kapitolách sa budeme zaoberať aplikáciou dokázaných všeobecných viet na získanie cyklických rozkladov kompletného grafu na podgrafy izomorfné danému grafu istého špeciálneho typu.

Príklad 1.6. Príkladom grafu, pre ktorý existuje α-očíslovanie, ale neexistuje β-očíslovanie (a teda ani δ-očíslovanie), je ľubovoľný graf, ktorý nie je párnym grafom a pre ktorý existuje α-očíslovanie (najmenším takým grafom je trojuholník).

Príklad 1.7. Príkladom grafu, pre ktorý existuje q-očíslovanie, ale neexistuje p-očíslovanie, je graf na obr.1.8.

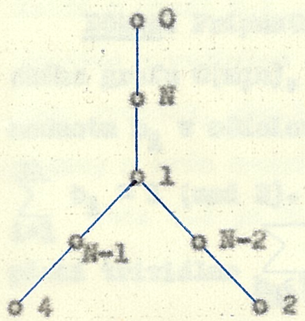


Obr.1.6 Obr.1.7 Obr.1.8

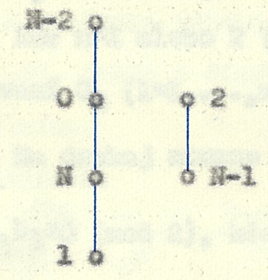
V nasledujúcich kapitolách sa budeme zaoberať aplikáciou dokázaných všeobecných viet na získanie cyklických rozkladov kompletného grafu na podgrafy izomorfné danému grafu istého špeciálneho typu.

Príklad 1.6. Príkladom grafu, pre ktorý existuje α-očíslovanie, ale neexistuje γ-očíslovanie (a teda ani δ-očíslovanie), je ľubovoľný graf, ktorý nie je párnym grafom a pre ktorý existuje α-očíslovanie (najmenším takým grafom je trojuholník).

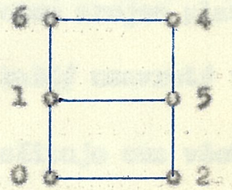
Príklad 1.7. Príkladom grafu, pre ktorý existuje q-očíslovanie, ale neexistuje p-očíslovanie, je graf na obr.1.8.



Obr.1.6



Obr.1.7



Obr.1.8

V nasledujúcich kapitolách sa budeme zaoberať aplikáciou dokázaných všeobecných viet na získanie cyklických rozkladov kompletného grafu na podgrafy izomorfné danému grafu istého špeciálneho typu.

Kapitola II

ROZKLADY KOMPLETNÉHO GRAFU NA MNOHOUHOLNÍKY

§1. V tejto kapitole sa budeme zaoberať rozkladmi kompletných grafov na n-uholníky, $n \geq 3$.

Najprv dokážeme niekoľko viet.

Veta 2.1 (Bosák). Ak je G(m;n) eulerovský graf, kde $n \equiv 1$ alebo 2 (mod 4), potom neexistuje α-očíslovanie grafu G.

Dôkaz. Predpokladajme, že existuje α-očíslovanie O_G eulerovského grafu G(m;n), kde $n \equiv 1$ alebo 2 (mod 4). Nech má hrana h_i hodnotu b_i v očíslovaní O_G (i=1,...,n). Potom zrejme platí $\sum_{i=1}^{n} b_i \equiv 1 \pmod 2$. Na druhej strane pre každý uzavretý ťah T platí triviálne $\sum_{h_i \in T} b_i \equiv 0 \pmod 2$, kde sa sčituje cez všetky hrany ťahu T. Získaný spor dokazuje vetu.

Veta 2.2 (Kotzig). Pre n-uholník existuje α-očíslovanie práve vtedy, keď $n \equiv 0$ alebo 3 (mod 4).

Dôkaz. Z vety 2.1 vyplýva, že v prípade, keď $n \equiv 1$ alebo 2 (mod 4), neexistuje α-očíslovanie n-uholníka.

Nech je $n \equiv 0$ (mod 4), $n = 4m$. Nech je n-uholník opísaný kružnicou $K = \{v_1, v_2, \ldots, v_{4m}, v_1\}$. Potom α-očíslovanie n-uholníka dostaneme, ak vrcholu v_i priradíme číslo a_i takto:

$$a_i = \begin{cases} (i-1)/2 & i \text{ nepárne} \\ 4m+1-i/2 & i \text{ párne, } i \leq 2m \\ 4m-i/2 & i \text{ párne, } i > 2m \end{cases} .$$

Každé z čísel 1,2,...,4m okrem čísla 3m je priradené práve jednému z vrcholov n-uholníka (číslo 3m nie je priradené žiadnemu vrcholu, obr.2.1). Každé z čísel 1,2,...,n je hodnotou

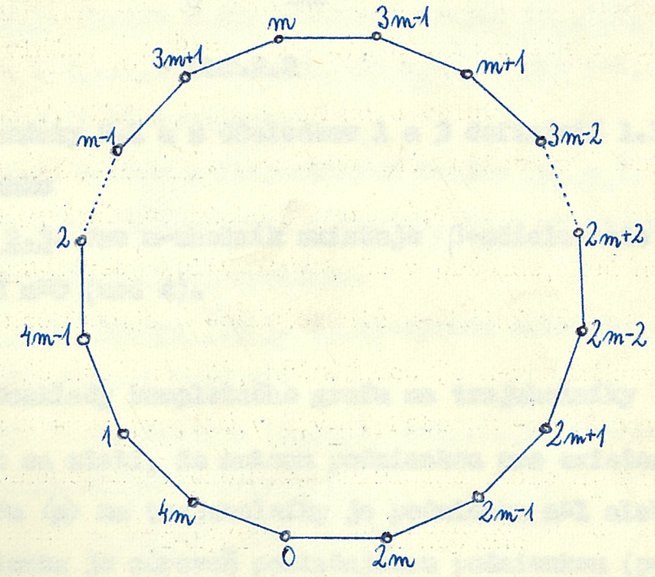
jednej z hrán n-uholníka.

Nech je $n \equiv 3 \pmod 4$, $n=4m-1$. Nech je n-uholník opísaný kružnicou $K = \{v_1, v_2, \dots, v_{4m-1}, v_1\}$. Potom α-očíslovanie n-uholníka dostaneme, ak vrcholu v_i priradíme číslo a_i takto:

$$a_i = \begin{cases} 4m-i/2 & i \text{ párne} \\ (i-1)/2 & i \text{ nepárne, } i \leqq 2m-1 \\ (i+1)/2 & i \text{ nepárne, } i > 2m-1 \end{cases}.$$

Každé z čísel $0,1,\dots,4m-1$ okrem čísla m je priradené práve jednému z vrcholov n-uholníka (číslo m nie je priradené žiadnemu vrcholu, obr.2.2). Každé z čísel $1,2,\dots,n$ je hodnotou jednej z hrán n-uholníka.

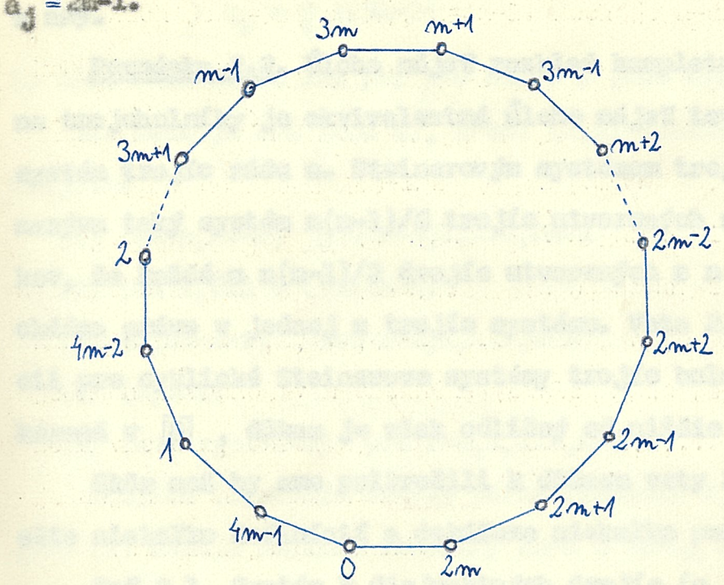
Veta 2.2 je dokázaná.



Obr.2.1

Poznámka 2.1. Ľahko sa zistí, že α-očíslovanie O_n n-uholníka, skonštruované v dôkaze vety 2.2, je pri $n \equiv 0 \pmod 4$ zároveň β-očíslovaním. O každej hrane (v_i, v_j) n-uholníka pla-

tí totiž v O_n alebo $a_i \leqq 2m-1$, $a_j > 2m-1$ alebo $a_i > 2m-1$, $a_j \leqq 2m-1$.



Obr.2.2

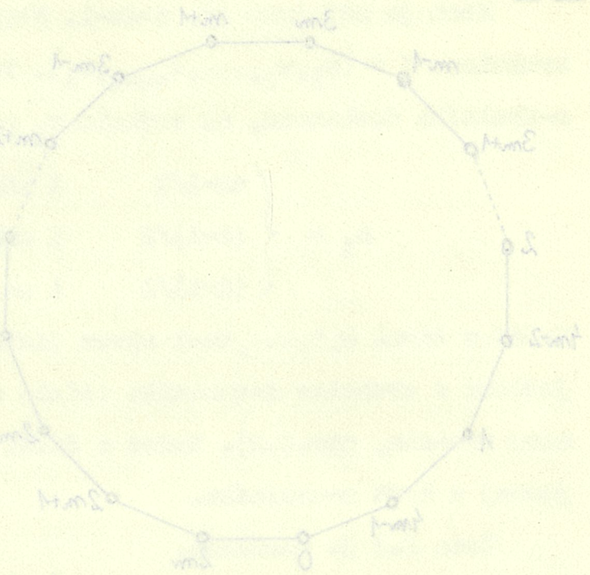
Z poznámky 2.1 a z dôsledkov 1 a 3 definícií 1.1 a 1.2 vyplýva ľahko

Veta 2.3. Pre n-uholník existuje β-očíslovanie práve vtedy, keď $n \equiv 0 \pmod 4$.

§2. Rozklady kompletného grafu na trojuholníky

Ľahko sa zistí, že nutnou podmienkou pre existenciu rozkladu grafu $\langle n \rangle$ na trojuholníky je podmienka $n \equiv 1$ alebo $3 \pmod 6$. Táto podmienka je zároveň postačujúcou podmienkou (pozri napr. [6], str.211). Na tomto mieste sa však budeme zaoberať len cyklickými rozkladmi kompletných grafov na trojuholníky, pričom dokážeme vetu:

Veta 2.4. Cyklický rozklad kompletného grafu $\langle n \rangle$ na troj-



uholníky existuje práve vtedy, keď je n=1 alebo 3 (mod 6), a n≠9.

Poznámka 2.2. Úloha nájsť rozklad kompletného grafu ⟨n⟩ na trojuholníky je ekvivalentná úlohe nájsť tzv. Steinerov systém trojíc ráđu n. Steinerovým systémom trojíc rádu n sa nazýva taký systém n(n-1)/6 trojíc utvorených z daných n prvkov, že každá z n(n-1)/2 dvojíc utvorených z n prvkov sa nachádza práve v jednej z trojíc systému. Veta 2.4 vo formulácii pre cyklické Steinerove systémy trojíc bola prvý raz dokázaná v [8], dôkaz je však odlišný od nižšie uvedeného [12].

Skôr než by sme prikročili k dôkazu vety 2.4, zavedieme ešte niekoľko definícií a dokážeme niekoľko pomocných viet.

Def.2.1. Systém k disjunktných dvojíc (p_r,q_r), obsahujúcich čísla 1,2,...,2k a takých, že $q_r-p_r=r$ pre r=1,...,k, budeme nazývať (A,k)-systémom.

Def.2.2. Systém k disjunktných dvojíc (p_r,q_r), obsahujúcich čísla 1,2,...,2k-1,2k+1 a takých, že $q_r-p_r=r$ pre r=1,..., k, budeme nazývať (B,k)-systémom.

Lema 2.1 (Skolem [18]). (A,k)-systém existuje práve vtedy, keď k=0 alebo 1 (mod 4).

Dôkaz. I. Ak dvojice (p_r,q_r), r=1,...,k, tvoria (A,k)-systém, potom sčítaním rovností

$$q_r-p_r=r\ ,\quad r=1,\dots,k$$

dostaneme

$$\sum q_r - \sum p_r = \tfrac{1}{2}\,k(k+1)\ .$$

Okrem toho platí

$$\sum q_r + \sum p_r = k(2k+1)\ ,$$

kde na ľavej i pravej strane je súčet čísel 1,2,...,2k.